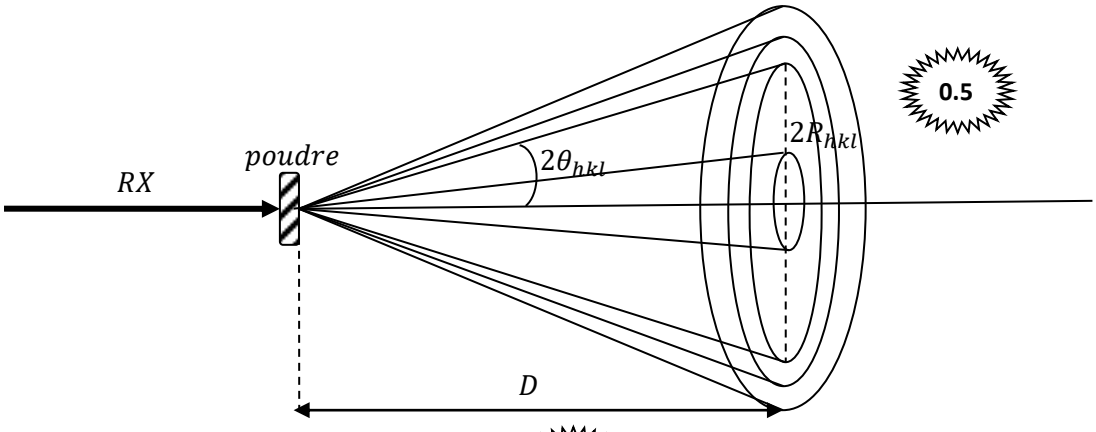
Université Ibn Khaldoun-Tiaret
Faculté des sciences de la matière
Département de physique

Année universitaire : 2023-2024
Niveau : Master1
Module : Propriétés physiques des matériaux
duré : 1H30

Correction d'examen

EXERCICE 01 (5 points) :



0.5

La loi de Bragg : $2d_{hkl}sin\theta_{hkl} = n\lambda$ 0.5

De la figure, on a : $tg(2\theta_{hkl}) = R_{hkl}/D$ 0.5

Pour le premier ordre ($n = 1$) 0.25

A partir de la loi de Bragg, on obtient : $\theta_{hkl} = arc\ sin(\lambda/2d_{hkl})$ 0.5

Où $d_{hkl} = a/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$

Alors le rayon de l'anneau est : $R_{hkl} = D.tg(2\theta_{hkl}) = D.tg\left(2arc\ sin\left[\lambda/\left(2a/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}\right)\right]\right)$ 0.5

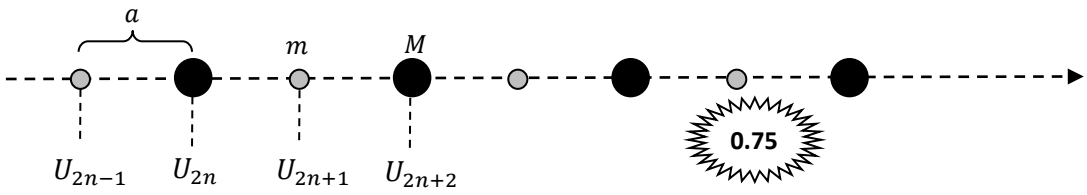
Les données : $\lambda = 0.865$ A° ; $D = 80\ mm$; $a = 3.136\ A^{\circ}$.

$(\boldsymbol{hkl})$	$\boldsymbol{d_{hkl}}$	$\boldsymbol{\theta_{hkl}}$	$\boldsymbol{R_{hkl}}$
(100)	$d_{100} = a = 3.136\ A^{\circ}$	$\theta_{100} = arcsin\left(\frac{0.865}{2 * 3.136}\right) = 0.138\ rd$	$R_{100} = 22.72\ mm$
(110)	$d_{110} = a/\sqrt{2} = 2.22\ A^{\circ}$	$\theta_{110} = arcsin\left(\frac{0.865}{2 * 2.22}\right) = 0.196\ rd$	$R_{110} = 33.08\ mm$
(111)	$d_{111} = a/\sqrt{3} = 1.809\ A^{\circ}$	$\theta_{111} = arcsin\left(\frac{0.865}{2 * 1.809}\right) = 0.24\ rd$	$R_{111} = 41.94\ mm$

0.75 0.75 0.75

EXERCICE 02 (7points):

1. Les équations du mouvement pour les deux types d'ions.



0.75

m: $$m\ddot{U}_{2n} = f(U_{2n+1} - U_{2n} + U_{2n-1} - U_{2n}) = f(U_{2n+1} + U_{2n-1} - 2U_{2n})$$ 0.5

M: $$M\ddot{U}_{2n+1} = f(U_{2n+2} - U_{2n+1} + U_{2n} - U_{2n+1}) = f(U_{2n+2} + U_{2n} - 2U_{2n+1})$$ 0.5

Les solutions de ces deux équations sont de la forme :

$$U_{2n}(t) = Ae^{[i(\omega t - 2nka)]} \quad \text{et} \quad U_{2n+1}(t) = Be^{[i(\omega t-(2n+1)ka)]}$$

m: $$m\frac{d^2}{dt^2}\left[Ae^{[i(\omega t-2nka)]}\right] = f\left(Be^{[i(\omega t-(2n+1)ka)]} + Be^{[i(\omega t-(2n-1)ka)]} - 2Ae^{[i(\omega t-2nka)]}\right)$$ 0.25

$$-m\omega^2 Ae^{[i(\omega t-2nka)]} = fe^{[i(\omega t-2nka)]}[B(e^{-ika} + e^{+ika}) - 2A]$$

$$\Rightarrow -m\omega^2 A = 2f[Bcos(ka) - A]$$ 0.5

M: $$M\frac{d^2}{dt^2}\left[Be^{[i(\omega t-(2n+1)ka)]}\right] = f\left(Ae^{[i(\omega t-(2n+2)ka)]} + Ae^{[i(\omega t-2nka)]} - 2Be^{[i(\omega t-(2n+1)ka)]}\right)$$ 0.25

$$-M\omega^2 Be^{[i(\omega t-(2n+1)ka)]} = fe^{[i(\omega t-(2n+1)ka)]}\left(Ae^{[-ika]} + Ae^{[ika]} - 2B\right)$$

$$\Rightarrow -M\omega^2 B = 2f[Acos(ka) - B]$$ 0.5

2. On obtient le système suivant

$$\begin{cases} (2f - m\omega^2)A - 2fcos(ka)B = 0 \\ 2fcos(ka)A + (M\omega^2 - 2f)B = 0 \end{cases}$$

Ce système admet de solutions, si le déterminant est nul

$$\begin{vmatrix} 2f - m\omega^2 & -2fcos(ka) \\ 2fcos(ka) & M\omega^2 - 2f \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow [2f - m\omega^2][M\omega^2 - 2f] + [2fcos(ka)]^2 = 0$$ 0.25

$$2fM\omega^2 + 2fm\omega^2 - mM\omega^4 - 4f^2 + 4f^2cos^2(ka) = 0$$

$$\Rightarrow mM\omega^4 - 2f(M+m)\omega^2 + 4f^2[1 - cos^2(ka)] = 0$$ 0.5

La solution de cette équation est :

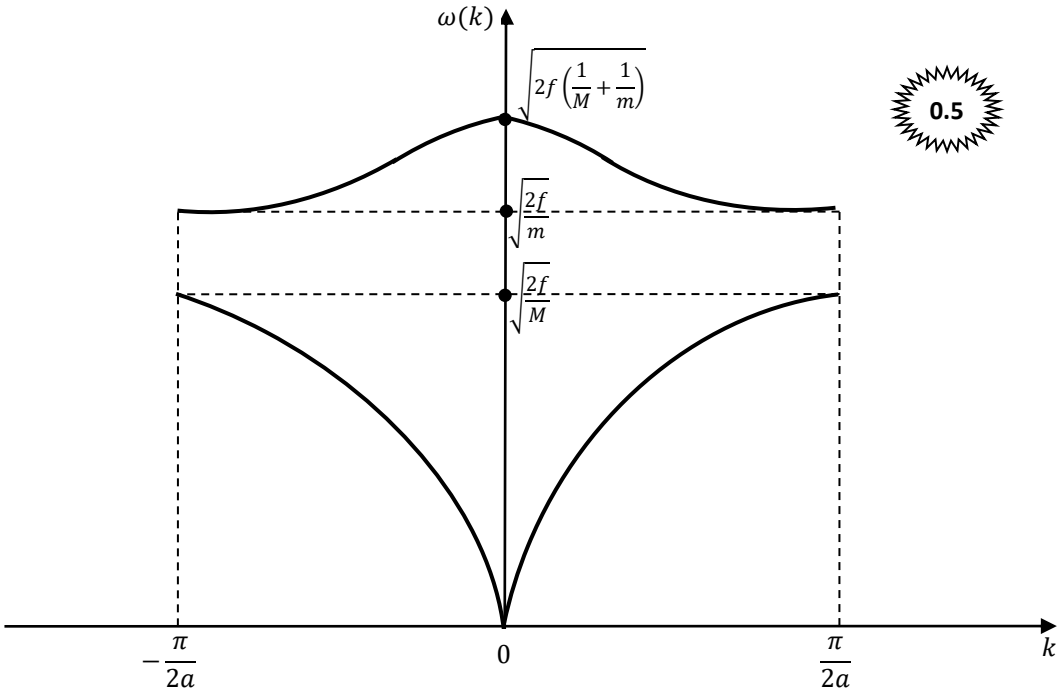
$$\omega^2{}_{1,2} = \frac{1}{2mM}\left\{2f(m+M) \pm \sqrt{4f^2(M+m)^2 - 16f^2mM[1 - cos^2(ka)]}\right\}$$

$$\omega^2{}_{1,2} = f\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \pm f\sqrt{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)^2 - \frac{4}{mM}[1 - cos^2(ka)]}$$

$$\Rightarrow \omega^2{}_{1,2} = f\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \pm f\sqrt{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)^2 - \frac{4}{mM}sin^2(ka)}$$ 0.5

Qui représente la relation de dispersion $\omega(k)$

3. Représentation graphique de $\omega(k)$ dans la première zone de Brillouin.



0.5

4. Les expressions de ω pour $k = 0$.

0.5

$$\Rightarrow \omega^2{}_{1,2} = f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) \pm f\sqrt{\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)^2} = f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) \pm f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^2{}_1 = f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) = 2f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) \\ \omega^2{}_2 = f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) - f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2{}_1 = 2f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) \\ \omega^2{}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{2f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)} & mode\ optique \\ \omega_2 = 0 & mode\ acoustique \end{cases}$$

0.5

5. La valeur de ω pour le mode optique en $k = 0$ pour $NaCl$, avec $f = 42\ N/m$, $m(Na) = 23\ amu$, $M(Cl) = 35.5\ amu$ ($1amu = 1.6\ 10^{-27}\ kg$).

$$\omega_1 = \sqrt{2f\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)} = \sqrt{2 * 42\left(\frac{1}{35.5}+\frac{1}{23}\right)\frac{1}{1.6\ 10^{-27}}} \approx 6.13.10^{13}\ rd/s$$

0.5

0.5

EXERCICE 03 (8 points):

a- La densité d'état $g(\omega)$:

$$g(\omega) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int_{S(\omega=cte)} \frac{dS_\omega}{|\vec{\nabla}\omega(k)|} = \frac{V}{(2\pi)^3 V_s}\int_{S_\omega} dS$$

Où $|\vec{\nabla}\omega(k)| = \frac{d\omega}{dk} = V_s$ **0.5**

0.5 $S(\omega = cte) \rightarrow k = cte \Rightarrow S\ est\ la\ surface\ d'une\ sphère de\ rayon\ k$

0.5 $g(\omega) = \frac{V}{(2\pi)^3 V_s} 4\pi k^2 \Rightarrow g(\omega) = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3 {V_s}^3}\omega^2 = \frac{V}{2\pi^2 {V_s}^3}\omega^2$ **0.5**

La densité d'état dans l'espace des fréquences $g(v)$:

$$g(\omega)d\omega = g(v)dv \Rightarrow g(v) = g(\omega)d\omega/dv = g(\omega)d(2\pi v)/dv = 2\pi g(\omega)$$ **0.5**

$$\Rightarrow g(v) = \frac{2\pi V}{2\pi^2 {V_s}^3}(2\pi v)^2 = \frac{4\pi V}{{V_s}^3}v^2 = Av^2$$ **0.5**

Où $A = \frac{4\pi V}{{V_s}^3}$.

b- La fréquence de Debye v_D :

$$\int_0^{v_D} g(v)dv = N = \int_0^{v_D} Av^2 dv = A\int_0^{v_D} v^2 dv = A\frac{v^3}{3}\Big|_0^{v_D} = \frac{A}{3}{v_D}^3 \Rightarrow {v_D}^3 = \frac{3N}{A} = \frac{3{V_s}^3}{4\pi V}$$ **0.5**

0.5 $\Rightarrow v_D = \left(\frac{3{V_s}^3 N}{4\pi V}\right)^{\frac{1}{3}}$ **0.5**

c- L'expression de l'énergie interne U sous forme d'intégrale: **0.5**

$U = 3\int_0^{v_D} g(v)\bar{E}dv$ **0.5** où $\bar{E} = \left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right)hv$ et $\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{hv}{KT}}-1}$ **0.5**

On néglige le ½ quantum qui correspond à l'énergie de l'oscillateur à $T = 0K$.

$$\Rightarrow U = 3A\int_0^{v_D} \frac{hv^3}{e^{\frac{hv}{KT}}-1}dv = \frac{3A}{h^2}(KT)^3\int_0^{v_D}\frac{\left(\frac{hv}{KT}\right)^3}{e^{\frac{hv}{KT}}-1}dv$$ **0.5**

Posons $X = \frac{hv}{KT}$, $X_D = \frac{hv_D}{KT}$

$$\Rightarrow U = \frac{3A}{h^2}(KT)^3\frac{KT}{h}\int_0^{X_D}\frac{X^3dX}{e^X-1} = \frac{3}{h^2}\left(\frac{4\pi V}{{V_s}^3}\right)(KT)^3\frac{KT}{h}\int_0^{X_D}\frac{X^3dX}{e^X-1} = 3\frac{3N}{{v_D}^3}\left(\frac{KT}{h}\right)^3 KT\int_0^{X_D}\frac{X^3dX}{e^X-1}$$

$$\Rightarrow U = 9N\left(\frac{kT}{hv_D}\right)^3 KT\int_0^{X_D}\frac{X^3dX}{e^X-1}$$

$$\Rightarrow U = 9N\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 KT\int_0^{X_D}\frac{X^3dX}{e^X-1}$$ **0.5**

d- L'énergie interne U aux basses températures : $KT \ll hv_D \Rightarrow T \ll \theta_D \Rightarrow X_D \gg 1$.

$$\Rightarrow U \approx 9N\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 KT\int_0^{\infty}\frac{X^3dX}{e^X-1} = 9N\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 KT.\frac{\pi^4}{15} \Rightarrow U = \frac{3}{5}\pi^4 NK\frac{T^4}{{\theta_D}^3}$$ **0.5**

e- La capacité calorifique C_V:

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{12}{5}\pi^4 NK\frac{T^3}{{\theta_D}^3}$$ **0.5**